Ecole Louis de BROGLIE - ESEO - ESTIT - ISEB - ISEM - ISEN - ISEP

Ecole associée : EISTI

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1994

SERIE P

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Vendredi 27 mai 1994 de 8 h à 12 h

ATTENTION : Votre copie est destinée à être corrigée et notée.
Il sera tenu compte de la qualité, de la présentation et de l'orthographe.
"L'usage de la calculatrice est autorisé".

Notations :

On désigne par F l'ensemble des fonctions réelles f définies et continues sur $[0,+\infty[$ et telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}(f(t))^2 dt$ converge.

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynômiales réelles définies sur $[0,+\infty[$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, E_n le sous-espace de E formé par les fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à n.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\varphi_n : \begin{array}{l}[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n e^{-t}\end{array} \qquad \text{et} \qquad L_n : \begin{array}{l}[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^t\, \varphi_n^{(n)}(t)\end{array}$$

où $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de φ_n.

I. Première partie

1) Soit $(f,g) \in F^2$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\, g(t)\, dt$ est absolument convergente.

2) Etablir que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que

$$(f,g) \mapsto (f|g) = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\, g(t)\, dt$$

est un produit scalaire sur F.

Dans la suite on notera $\| \ \|$ la norme euclidienne associée.

3) Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de F.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que L_n est un élément de E ; on précisera le degré de L_n et le coefficient a_{nk} de t^k dans l'expression de L_n.
Expliciter L_0 et L_1.

5) Calculer, pour tout n et m de $\mathbb{N}$, $(L_n | L_m)$. (On pourra utiliser des intégrations par parties).

6) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la famille $\left(\frac{1}{k!} L_k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormale de E_n.

7) Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_n définie par :

$$\forall t \in [0,+\infty[\quad P_n(t) = L_{n+2}(t) + (t-2n-3)\, L_{n+1}(t).$$

a) Montrer que $P_n \in E_n$.

b) Etablir : $\forall n \geqslant 1 \quad \forall k \in \{0, \ldots, n-1\} \quad (P_n | L_k) = 0.$

c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\forall t \in [0,+\infty[\qquad L_{n+2}(t) + (t-2n-3)\, L_{n+1}(t) + (n+1)^2\, L_n(t) = 0.$$

II. <u>Deuxième partie</u>

Pour tout réel a on définit f_a par : $\forall t \in [0,+\infty[\quad f_a(t) = e^{-at}$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que f_a soit un élément de F.

Dans <u>la suite</u> on suppose que $f_a \in F$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que, pour tout k de $\{0,\ldots,n\}$, $(L_k | f_a) = k!\ \dfrac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$.

b) En déduire l'expression du projeté orthogonal de f_a sur E_n, noté S_{na}, en fonction des L_k.

c) Calculer $\|S_{na}\|^2$.

d) En déduire que la suite $(S_{na})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f_a dans F muni de $\| \ \|$.

3) Soit $\lambda \in [0,+\infty[$, λ fixé. On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{L_n(\lambda)}{n!} x^n$. On note R_λ son rayon de convergence et G_λ sa somme.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |L_n(\lambda)| \leqslant n!\ (1+\lambda)^n$.

b) En déduire que $R_\lambda > 0$.

Dans la suite on admet que $R_\lambda = 1$.

c) En utilisant la relation du I.7) c), montrer que G_λ est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle

$$(E_\lambda) : (1-x)^2 y' - (1-x-\lambda)\ y = 0.$$

d) Résoudre (E_λ) sur $]-1,1[$ et en déduire l'expression de G_λ.

4) En utilisant ce qui précède, démontrer que la suite de fonctions $(S_{na})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers f_a.

III. Troisième partie

Dans toute cette partie n désigne un élément fixé de $\mathbb{N}$.

1) a) Etablir : $\forall t \in [0,+\infty[\quad L_{n+1}(t) = t\ L_n'(t) + (n+1-t)\ L_n(t)$ (On pourra remarquer que $\varphi_{n+1}(t) = t\ \varphi_n(t)$).

b) En utilisant la relation du I.7) c) et ce qui précède, montrer que L_n est solution sur $[0,+\infty[$ de l'équation différentielle (ε_n) : $t\ z'' + (1-t)z' + nz = 0$.

2) Soit Z une solution de (ε_n) sur $]0,+\infty[$, linéairement indépendante de L_n.

a) Justifier l'existence de Z et établir l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que L_n ne s'annule pas sur $]0,\alpha[$.

b) Sur $]0,\alpha[$ on pose $U = \frac{Z}{L_n}$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par U sur $]0,\alpha[$ et en déduire qu'il existe un réel K non nul tel que $U'(t) \sim \frac{K}{t}$ au voisinage de 0 à droite.
Etudier la limite de U(t) quand t tend vers 0^+.

3) Déterminer la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions de (ε_n) sur $[0,+\infty[$.

4) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. On considère Z_1 et Z_2 deux solutions linéairement indépendantes de (ε_n) sur $]0,+\infty[$ et on suppose :

$$\begin{cases} Z_1(a) = Z_1(b) = 0 \\ Z_1 \text{ ne s'annule pas sur }]a,b[\end{cases}.$$

Montrer que Z_2 s'annule une et une seule fois sur $]a,b[$. (On pourra utiliser la fonction $W = Z_1 Z_2' - Z_2 Z_1'$ et calculer W').

5) Montrer que toute solution non nulle de (ε_n) sur $]0,+\infty[$ s'annule un nombre fini de fois dans $]0,+\infty[$.
